

# Összefoglaló

## OTKA F67729 pályázat: 2007 - 2011

### Anomális áramfluktuációk

2006-ban sikerült társszerzőimmel, Eric Catorral és Timo Seppäläinennel megmutatnunk [4], hogy a last passage perkolációra is kiterjeszthető a [15]-ben leírt módszer. Ezt az eredményt követte a módszer további kiterjesztése az aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat esetére. Ez lényegében 2006-ban megtörtént [12], a cikk publikálása az Annals of Mathematics-nél a beszámolási időszakra húzódott. Jelen kutatás fő iránya ezen eredmények kiterjesztése volt.

A kiterjesztés első lépéseként a konstans rátájú teljesen aszimmetrikus zero range folyamat (lásd alább) volt a természetes jelölt, a kiterjesztést Komjáthy Júliával, aki akkor MSc diplomamunkáját írta, meg is tettük [6]. Eközben a módszer tisztult, egyszerűbb, átláthatóbb lett, amit érdemesnek tartottunk külön a kizárásos folyamatra leközölni [11]. A tapasztalatokkal felvértezve végül az eljárást meglehetősen általános formában is felírtuk, ezt két részletben publikáltuk/publikáljuk [8]/[7]. Az itt vázolt általánosabb megfogalmazást foglalom össze az alábbiakban.

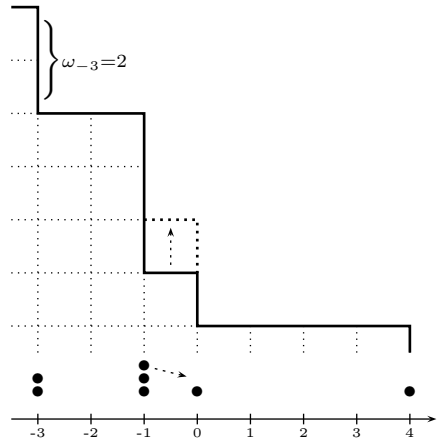
A modellcsalád tagjai

$$\omega(t) = \{\omega_i(t) \in I : i \in \mathbb{Z}\}$$

folyamatok, ahol  $i$  a számegyenes egy rácshelyét,  $t$  az időt jelöli, és  $I$  egy véges vagy végtelen diszkrét intervallum. A modellek időfejlődése folytonos idejű ugró Markov-dinamika szerint történik, a következő lépésekkel és rátákkal:

$$\begin{aligned} (\dots, \omega_i, \omega_{i+1}, \dots) &\rightarrow (\dots, \omega_i - 1, \omega_{i+1} + 1, \dots) & p(\omega_i, \omega_{i+1}) \text{ rátával,} \\ (\dots, \omega_i, \omega_{i+1}, \dots) &\rightarrow (\dots, \omega_i + 1, \omega_{i+1} - 1, \dots) & q(\omega_i, \omega_{i+1}) \text{ rátával.} \end{aligned}$$

Amennyiben  $I$ -ben csak nemnegatív egészek szerepelnek, akkor az  $\omega_i$  változók felfoghatók részecske-számnak az  $i$ . rácshelyen, és a felső sorban egy részecske jobbra, az alsó sorban egy részecske balra ugrása történik. Az ugrás rátája az indulási és érkezési részecskeszámoktól függhet. Emellett tetszőleges  $I$  esetén adható a modelleknek egy falnövekedés interpretációja, melyben  $h_i$  az  $i$ . és  $i + 1$ . rácshely közötti oszlop magassága,  $\omega_i = h_{i-1} - h_i$  a fal negatív diszkrét gradiense. Ekkor a fenti első lépés a fal oszlopának növekedése, a második lépés pedig az oszlop csökkenése, lásd az 1. ábrát. Ebben az interpretációban a lépések rátája az oszlop szomszédainak relatív magasságától függ. Egyszerű, de fontos összefüggés, hogy a fal növekedése a részecske-interpretációban pont a részecskék időintegrált áramának felel meg.



1. ábra. A fal és a részecskék egy lehetséges lépéssel

A kutatásban a következő modellekre van eredményünk:

ASEP. Az *aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat* esetén

$$I = \{0, 1\}, \quad p(\omega_i, \omega_{i+1}) = p \cdot \mathbf{1}\{\omega_i = 1, \omega_{i+1} = 0\}, \quad q(\omega_i, \omega_{i+1}) = q \cdot \mathbf{1}\{\omega_i = 0, \omega_{i+1} = 1\},$$

ahol a jelölésekkel kissé visszaélve bevezettük a  $0 \leq p = 1 - q \leq 1$  szorzókat; számunkra fontos az aszimmetria:  $p \neq \frac{1}{2} \neq q$ .

TAZRP. Egy teljesen aszimmetrikus, kellően konkáv *zero range folyamatot* kapunk a következő választásokkal:

$$I = \{0, 1, \dots\}, \quad p(\omega_i, \omega_{i+1}) = f(\omega_i), \quad q(\omega_i, \omega_{i+1}) \equiv 0,$$

ahol  $f(0) = 0$ ,  $f$  monoton növekvő, és van olyan  $0 < r < 1$ , hogy minden olyan  $\omega$  értékre, melyre  $f(\omega) - f(\omega - 1) > 0$ ,

$$\frac{f(\omega + 1) - f(\omega)}{f(\omega) - f(\omega - 1)} \leq r.$$

A definícióba beleértendő többek között a konstans rátájú  $f(\omega) = \mathbf{1}\{\omega > 0\}$  eset is. Egy kevésbé triviális osztály:

$$f(\omega) = 1 - \exp(-\beta z^\vartheta), \quad \beta > 0, \quad \vartheta \geq 1.$$

BLP. Egy teljesen aszimmetrikus, exponenciálisan konvex *kőműves folyamatot* kapunk, ha

$$I = \mathbb{Z}, \quad p(\omega_i, \omega_{i+1}) = f(\omega_i) + f(-\omega_{i+1}), \quad f(\omega) = \exp(\beta(z - \tfrac{1}{2})).$$

A felsorolt modelleknek minden olyan  $\varrho$  sűrűségre, amely benne van az  $I$  által kifeszített valós (nyílt) intervallumban, van  $\mu^\varrho$  stacionárius szorzat-eloszlása, mely szerint  $\mathbf{E}^\varrho \omega_i = \varrho$ . Minden ilyen  $\varrho$  sűrűséghez tartozik egy  $V^\varrho$  *karakterisztikus sebesség*, ami a hidrodinamikai egyenletben a kis perturbációk terjedési sebessége. A kutatás fő eredménye, hogy a fent felsorolt három modell mindegyikében a karakterisztikus irányban mért falnövekedés avagy részecskeáram fluktuációi anomálishan skálázódnak, azaz létezik egy olyan sűrűségtől függő  $C = C(\varrho)$  konstans, mellyel

$$\frac{1}{C} < \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{D}^2 h_{[V^\varrho t]}(t)}{t^{2/3}} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{D}^2 h_{[V^\varrho t]}(t)}{t^{2/3}} < C$$

ha a modellt a  $\varrho$  sűrűségű stacionárius eloszlásából indítjuk.

Az egyéb irányokban jelentkező normális fluktuációkat és az ennek megfelelő centrális határel-oszlástétel korábban is ismert volt ([2, 18]).

A témakörben jelenleg áttörés zajlik. A miénktől teljesen különböző, kombinatorikus és komoly analitikus módszerekkel hasonló skálázást, sőt skálalimeszt is lehet bizonyítani, két fontos példa a tekintélyes szakirodalomból [20, 22]. Funkcionálanalitikus módszerekkel is születtek anomális skálázást bizonyító eredmények, pl. [21].

A fenti modellek *attraktívak*, ami szempontunkból azért lényeges, mert ha két modellt,  $\underline{\eta}$ -t és  $\underline{\omega}$ -t azonos kezdőfeltételtől indítunk, kivéve az origót, ahol  $\eta_0(0) + 1 = \omega_0(0)$ , akkor van olyan sztochasztikus csatolás, melyben az egyetlen különbség megmarad, ám a helyzete időben változik. Ezt a különbséget *másodosztályú részecskének* hívják. Nevezzük a pozícióját  $Q(t)$ -nek, ekkor tehát  $Q(0) = 0$ . Módszerünk másik eredménye, hogy a  $\varrho$  sűrűségű stacionárius eloszlás (kis perturbációjából) indítva van olyan  $C_1 = C_1(\varrho)$  konstans, hogy minden  $1 \leq m < 3$  kitevőre

$$\frac{1}{C_1} < \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}|Q - V^\varrho t|^m}{t^{2m/3}} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}|Q - V^\varrho t|^m}{t^{2m/3}} < \frac{C_1}{3 - m}.$$

Ez többek között a másodosztályú részecske szuperdiffuzivitását is jelenti ( $m = 2$  eset).

A módszer nagy előnye a robusztusság, ez tette lehetővé, hogy egyszerre bizonyítsuk a tételt a fenti három modellre. További folyamatokra a bizonyítás egy technikai feltétel ellenőrzését igényelné, amely meglehetősen általános keretben került megfogalmazásra. Ennek ellenőrzése nehéz, további modellekre tervezzük a jövőben.

A módszer robusztussága azt is lehetővé tette, hogy az aszimmetrikus kizárásos folyamat gyengén aszimmetrikus verziójára:

$$I = \{0, 1\}, \quad p(\omega_i, \omega_{i+1}) = \tfrac{1}{2} \cdot \mathbf{1}\{\omega_i = 1, \omega_{i+1} = 0\}, \quad q(\omega_i, \omega_{i+1}) = (\tfrac{1}{2} + \varepsilon^{1/2}) \cdot \mathbf{1}\{\omega_i = 0, \omega_{i+1} = 1\}$$

is kiterjesszük a tételt [9]:  $0 < \varepsilon < 1/4$  esetén

$$\frac{1}{C_2} < \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon \mathbf{D}^2 h_0(\varepsilon^{-2}t)}{t^{2/3}} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon \mathbf{D}^2 h_0(\varepsilon^{-2}t)}{t^{2/3}} < C_2.$$

Bertini és Giacomin [14] cikke nyomán ez a skálázás a híres Kardar-Parisi-Zhang egyenlet Hopf-Cole transzformáción keresztül értelmezett megoldásainak skálázását is bizonyítja [9], ami cikkünk előtt nem volt szigorúan bizonyítva.

További, kevésbé jelentős következményei is vannak a tételeinknek, melyeket hely hiányában most nem részletezek.

## Bolyongó lökéshullámok

A fent definiált másodosztályú részecske egy bonyolult objektum. Régóta vizsgált kérdés, hogy a nézőpontjába helyezett  $\tau_{Q(t)}\omega(t)$  folyamatnak mi a stacionárius eloszlása. Az első naív ötlet, mely szerint a fenti  $\mu^\varrho$  szorzatmérték lenne az, nem működik. A kérdés megválaszolásában segít, ha nem sík modellben kérdezzük, hanem abban az esetben, amikor a bal és jobb oldalon az aszimptotikus sűrűség különböző, ezen belül is a *lökéshullám* eset tűnik könnyebnek a *ritkulási hullám* eseténél. A választ ASEP-re Derrida, Lebowitz és Speer [16] illetve Ferrari, Fontes és Kohayakawa [19] adták meg, és van egy rendkívül érdekes része: a két oldali sűrűségparaméterek megfelelő összefüggése esetén mégiscsak az eredeti  $\mu^\varrho$  szorzatmértékek lesznek stacionáriusak a másodosztályú részecskéből nézve, természetesen a két különböző sűrűséget használva a két oldalon. A szerzők több ilyen lökéshullámot is le tudtak írni egyszerre, így a köztük levő, rendkívül érdekes kölcsönhatás is megfigyelhető volt. Mint kiderült, mindez igaz marad a fenti BLP folyamatban is [1], hasonlóan speciális lökéshullám sűrűségértékek választásával.

A következő érdekes fejlemény Belitsky és Schütz [13] cikke volt, melyben megmutatták, hogy ha a másodosztályú részecskét elfelejtjük, akkor pontosan az előbb említett speciális sűrűség-összefüggések esetén a két különböző sűrűségből összeállított lökéshullám-szorzatmérték „egyszerű bolyongást végez”. Ez kicsit érthetőbben azt jelenti, hogy az ilyen mérték a saját eltoltjainak lineár-kombinációjába fejlődik, ahol az együthatók pont egy egyszerű bolyongó átmenetvalószínűségeivel egyeznek meg. A bizonyítást kvantum algebra formalizmus segítségével végezték, én 2004-ben ugyanezt megismételtem a fent bemutatott BLP folyamatra generátoros és valószínűségi számítási írásmóddal [3]. Itt is pont azokkal a sűrűség-összefüggésekkel működött a bolyongó lökéshullám interpretáció, mint amelyekkel a másodosztályú részecske stacionárius szorzat lökéshullám eloszlása.

Két különböző modellben (ASEP, BLP) két nagyon hasonló eredmény született tehát: a lökéshullám szorzateloszlások pontosan akkor végeznek egyszerű bolyongást, amikor a másodosztályú részecske a lökéshullám szorzateloszlást stacionáriusnak látja. Felmerült a kérdés, hogy vajon bele tudjuk-e illeszteni a bolyongó lökéshullámba magát a másodosztályú részecskét, mely ily módon (a stacionárius eloszlásra kiintegrálva) maga is egyszerű bolyongást végezne. A beszámolási időszakban egy fizikus társszerzővel: Rákos Attilával, és két diákkal: Farkas Györggyel és Kovács Péterrel pozitív választ adtunk a kérdésre [5], ezt részletezem kissé alább.

Egy rácshelyen két modell,  $\underline{\eta}$  és  $\underline{\omega}$  marginális eloszlásait definiáljuk a következőképpen:

$$\nu^\varrho(\eta_i, \omega_i) = \begin{cases} \mu^\varrho(\eta_i), & \text{ha } \eta_i = \omega_i, \\ 0, & \text{ha } \eta_i \neq \omega_i, \end{cases}$$

ahol  $\mu^\varrho$  a fent is leírt stacionárius marginális. Legyen  $\hat{\mu}$  egy olyan eloszlás  $I$ -n, melyre  $\hat{\mu}(\omega^{\max}) = 0$  ha az  $I$  maximális  $\omega^{\max}$  eleme véges. Definiáljuk a

$$\hat{\nu}(\eta_i, \omega_i) = \begin{cases} \hat{\mu}(\eta_i), & \text{ha } \omega_i = \eta_i + 1, \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

mértéket. Ezekkel a marginálisokkal a

$$\underline{\nu}_j := \bigotimes_{i < j} \nu^\varrho \bigotimes_{i=j} \hat{\nu} \bigotimes_{i > j} \nu^\lambda$$

szorzatmérték egyetlen másodosztályú részecskét ír le a  $j$  helyen, két oldalán  $\varrho$  illetve  $\lambda$  sűrűségű szorzat eloszlással. Az eredmény röviden összefoglalva az, hogy az ASEP és a BLP modellekben  $\hat{\mu}$  és a két sűrűségérték megfelelő választásával  $\underline{\nu}_j$  saját eltoltjainak lineárkombinációjába fejlődik, az együttthatók pedig ugyanazok a bolyongás átmenetvalószínűségek, mint a korábbi bolyongó lökeshullám esetekben. Szintén kezelni tudjuk a több lökeshullám esetét, mindegyikben egy másodosztályú részecske ül, és ezek az objektumok kölcsönhatnak egymással.

### Egy tömegközépponton keresztül kölcsönható részecskerendszer

A következő munkánk keretében egy diákkal: Rácz Miklós Zoltánnal, és Tóth Bálinttal egy térbeli struktúrával kevésbé rendelkező kölcsönható rendszert vizsgáltunk. A valós számegyenesen van  $n$  darab részecske az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  pozíciókban. A tömegközéppontjuk

$$m = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i,$$

és egy adott konfigurációban a részecskék egymástól függetlenül ugranak, az  $i$ . részecske ugrási rátája  $w(x_i - m)$ . Amikor ugranak, független véletlen hosszakat ugranak előre felé, az ugrás hosszának sűrűségfüggvénye  $\varphi$ .  $w$  a rátafüggvény, feltesszük róla, hogy monoton csökkenő. Ezáltal a lemaradó részecskék nagyobb, az elől járók kisebb rátával ugranak, és a részecskék közel maradnak egymáshoz.

Véges sok (de kettőnél több) részecske esetén a rendszer nehezen kezelhető, azonban az érdekes,  $n \rightarrow \infty$  esetre tudtunk eredményeket felmutatni. Három kérdést vizsgáltunk ebben az esetben: az empirikus mérték konvergenciáját, annak bizonyítását, hogy a limesz  $\varrho$  sűrűségfüggvénye egy determinisztikus parciális integro-differenciálegyenletet elégít ki:

$$\frac{\partial \varrho(x, t)}{\partial t} = -w(x - m(t))\varrho(x, t) + \int_{-\infty}^x w(y - m(t))\varrho(y, t)\varphi(x - y) dy,$$

ahol

$$m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x\varrho(x, t) dx,$$

illetve a differenciálegyenlet tömegközéppontból nézett stacionárius eloszlásait határoztuk meg bizonyos esetekben. Közben kapcsolatot találtunk extrémális eloszlásokkal is. A bizonyítás során többé-kevésbé standard technikákat használunk, melyeket azonban ki kellett terjesztenünk, hogy a modellre alkalmazhatók legyenek. Eredményeinket hamarosan publikáljuk, egyelőre preprint formájában elérhetők [10].

### Elektromos hálózatok - irreverzibilis Markov-láncok

Régóta ismert [17], hogy reverzibilis Markov láncok elérési idejei és várható lépésszámai, illetve elektromos ellenálláshálózatok feszültségei és áramai szoros kapcsolatban állnak egymással. Az analógiákat úgy lehet felírni, ha az áramkör  $C_{xy}$  vezetőképességei és a Markov lánc  $P_{xy}$  átmenetmátrixa között a

$$P_{xy} = \frac{C_{xy}}{\sum_{y \sim x} C_{xy}}$$

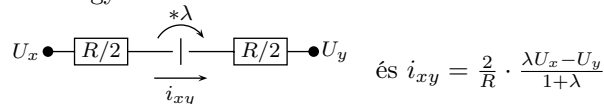
összefüggést tesszük fel. További kapcsolat állítható fel az ún. *commute time* és *cover time*, illetve a hálózat effektív ellenállása között. Az ellenálláshálózatok effektív ellenállásának szép tulajdonságai pedig tranziencia-rekurrencia bizonyításokat is lehetővé tesznek reverzibilis Markov láncok esetén.

Az irreverzibilis esetre hasonló analógia nem volt ismert. Folly Áron diákkal kidolgoztuk az analógiát az irreverzibilis esetre is. A kulcs a hagyományos ellenállás

$$U_x \bullet \text{---} \boxed{R} \text{---} \bullet U_y \quad \text{és} \quad i_{xy} = \frac{U_x - U_y}{R}$$

$\xrightarrow{i_{xy}}$

összefüggésének kicserélése egy erősítő elemre



összefüggésére. A közepén szereplő aktív erősítő bal oldalán levő potenciál  $\lambda$ -szorososa található a jobb oldalán, ezt kifejtve jön ki a fenti összefüggés az áramok és a feszültségek között.

Az áramkör és az irreverzibilis Markov lánc valószínűségeire felírt egyenletek tehát itt is analógiába hozhatók, és a reverzibilis esettel hasonló megfeleltetések lesznek igazak. Az a nemtriviális tény is kiderül, hogy irreverzibilis Markov láncokhoz tartozó áramköröknek lesz effektív ellenállása, és ez is kapcsolatban lesz a commute time-al és a cover time-al. Amit viszont a reverzibilis esethez képest elveszítünk, az az effektív ellenállás szép függése az egyes komponensektől. Ezért – most már Telcs Andrással is együttműködve – keressük, hogy az analógia hogyan használható érdekes irreverzibilis Markov lánc tételek bizonyítására.

## Hivatkozások

- [1] M. Balázs. Microscopic shape of shocks in a domain growth model. *J. Stat. Phys.*, 105(3/4):511–524, 2001.
- [2] M. Balázs. Growth fluctuations in a class of deposition models. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 39(4):639–685, 2003.
- [3] M. Balázs. Multiple shocks in bricklayers’ model. *J. Stat. Phys.*, 117:77–98, 2004.
- [4] M. Balázs, E. Cator, and T. Seppäläinen. Cube root fluctuations for the corner growth model associated to the exclusion process. *Electron. J. Probab.*, 11:no. 42, 1094–1132 (electronic), 2006.
- [5] M. Balázs, Gy. Farkas, P. Kovács, and A. Rákos. Random walk of second class particles in product shock measures. *J. Stat. Phys.*, 139(2):252–279, 2010.
- [6] M. Balázs and J. Komjáthy. Order of current variance and diffusivity in the rate one totally asymmetric zero range process. *J. Stat. Phys.*, 133(1):59–78, 2008.
- [7] M. Balázs, J. Komjáthy, and T. Seppäläinen. Fluctuation bounds in the exponential bricklayers process. <http://arxiv.org/abs/1107.4752>, preprint, 35 pages, 2011.
- [8] M. Balázs, J. Komjáthy, and T. Seppäläinen. Microscopic concavity and fluctuation bounds in a class of deposition processes. <http://arxiv.org/abs/0808.1177>, accepted for publication in the *Annales de l’Institut Henri Poincaré. Probabilités et Statistiques*, 2011.
- [9] M. Balázs, J. Quastel, and T. Seppäläinen. Scaling exponent for the hopf-cole solution of kpz/stochastic burgers. *Journal of the American Mathematical Society*, 24:683–708, 2011.
- [10] M. Balázs, M. Z. Rácz, and B. Tóth. Modeling flocks and prices: Jumping particles with an attractive interaction. <http://arxiv.org/abs/1107.3289>, preprint, 35 pages, 2011.
- [11] M. Balázs and T. Seppäläinen. Fluctuation bounds for the asymmetric simple exclusion process. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, VI:1–24, 2009.
- [12] M. Balázs and T. Seppäläinen. Order of current variance and diffusivity in the asymmetric simple exclusion process. *Ann. of Math.*, 171(2):1237–1265, 2010.
- [13] V. Belitsky and G. M. Schütz. Diffusion and scattering of shocks in the partially asymmetric simple exclusion process. *Electron. J. Probab.*, 7(10):1–12, 2002.
- [14] L. Bertini and G. Giacomin. Stochastic burgers and kpz equations from particle systems. *Comm. Math. Phys.*, 183(3):571–607, 1997.
- [15] E. Cator and P. Groeneboom. Second class particles and cube root asymptotics for Hamersley’s process. *Ann. Probab.*, 34(4):1273–1295, 2006.

- [16] B. Derrida, J. L. Lebowitz, and E. R. Speer. Shock profiles for the asymmetric simple exclusion process in one dimension. *J. Stat. Phys.*, 89(1-2):135–167, 1997.
- [17] P. G. Doyle and J. L. Snell. Random walks and electric networks. <http://arxiv.org/abs/math/0001057>, 2000.
- [18] P. A. Ferrari and L. R. G. Fontes. Current fluctuations for the asymmetric simple exclusion process. *Ann. Probab.*, 22(2):820–832, 1994.
- [19] P. A. Ferrari, L. R. G. Fontes, and Y. Kohayakawa. Invariant measures for a two-species asymmetric process. *J. Stat. Phys.*, 76:1153–1177, 1994.
- [20] P. L. Ferrari and H. Spohn. Scaling limit for the space-time covariance of the stationary totally asymmetric simple exclusion process. *Comm. Math. Phys.*, 265(1):1–44, 2006.
- [21] J. Quastel and B. Valkó.  $t^{1/3}$  Superdiffusivity of finite-range asymmetric exclusion processes on  $\mathbb{Z}$ . *Comm. Math. Phys.*, 273(2):379–394, 2007.
- [22] C. A. Tracy and H. Widom. Total current fluctuations in the asymmetric simple exclusion process. *J. Math. Phys.*, 50:095204, 2009.